ملخص رياضة تطبيقية الصف الثالث الثانوي

تذكر متجه عزم قوة بالنسبة لنقطة

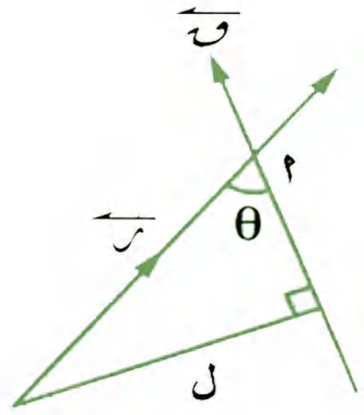
✸ إذا كان ($\overleftarrow{ر}$) متجه الموضع لأى نقطة أ على خط عمل القوة $\overleftarrow{ق}$ بالنسبة لنقطة و

فإن : **متجه عزم $\overleftarrow{ق}$ بالنسبة لنقطة و ($\overleftarrow{ج_و}$) = $\overleftarrow{ر} \times \overleftarrow{ق}$**

✸ إذا كانت θ قياس الزاوية الصغرى بين المتجهين $\overleftarrow{ر}$ ، $\overleftarrow{ق}$ عند

رسمهما خارجين من نفس النقطة ، ل طول العمود الساقط من و

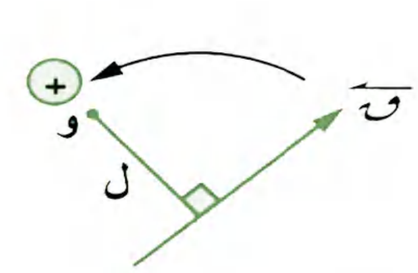
على خط عمل ق ، ى متجه وحدة فى اتجاه متجه العزم



فإن : • $\overleftarrow{ج_و}$ = (ر ق جا θ) $\overleftarrow{ى}$ = (ق ل) $\overleftarrow{ى}$

• $\| \overleftarrow{ج_و} \|$ = ر ق جا θ = ق × ل ومنها ل = $\frac{\| \overleftarrow{ج_و} \|}{ق}$

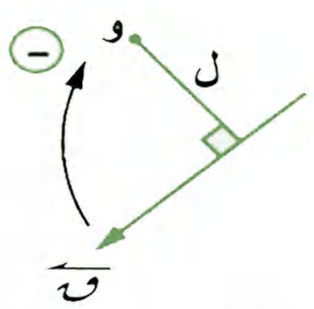
• القياس الجبرى للعزم $ج_و$:



$ج_و$ = ق ل

اتجاه دوران $\overleftarrow{ق}$ حول و

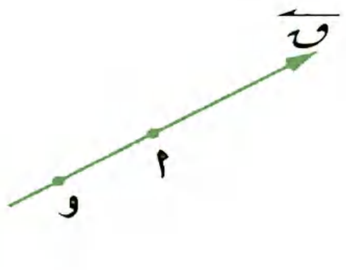
ضد اتجاه حركة عقارب الساعة



$ج_و$ = − ق ل

اتجاه دوران $\overleftarrow{ق}$ حول و

مع اتجاه حركة عقارب الساعة



$ج_و$ = صفر

خط عمل $\overleftarrow{ق}$ يمر بـ و

تذكر أن

① عزم قوة بالنسبة لنقطة ثابت لا يتوقف على موضع نقطة تأثير القوة على خط عمل $\overleftarrow{ق}$

② مبدأ العزوم (نظرية فارينون) : عزم قوة $\overleftarrow{ق}$ بالنسبة لنقطة يساوى مجموع عزوم مركبات هذه القوة بالنسبة لنفس النقطة.

③ النظرية العامة للعزوم : المجموع الجبرى لعزوم مجموعة من القوى حول أى نقطة يساوى عزم المحصلة حول نفس النقطة.

لاحظ أنه :

① إذا كانت : أ ∋ خط عمل $\overleftarrow{ق}$ فإن : $\overleftarrow{ج_أ}$ = ٠

وبصفة عامة : المجموع الجبرى لعزوم مجموعة من القوى حول أى نقطة على خط عمل المحصلة يساوى الصفر

② إذا كان : $\overleftarrow{ج_أ}$ = $\overleftarrow{ج_ب}$ فإن : $\overleftarrow{ق}$ // $\overleftrightarrow{أ ب}$

وبصفة عامة : إذا كان مجموع عزوم عدة قوى مستوية حول أ = مجموع عزوم هذه القوى حول ب فإن خط عمل المحصلة يوازى $\overleftrightarrow{أ ب}$

③ إذا كان : $\overleftarrow{ج_{م}} = -\overleftarrow{ج_{ن}}$ فإن خط عمل $\overleftarrow{ق}$ ينصف $\overline{أ ب}$

وبصفة عامة : إذا كان مجموع عزوم عدة قوى مستوية حول أ = − مجموع عزوم هذه القوى حول ب فإن خط عمل المحصلة ينصف $\overline{أ ب}$

④ إذا أثرت قوة $\overleftarrow{ق}$ فى مستوى ما وكان $\overline{أ ب}$ ينتمى لمستوى $\overleftarrow{ق}$ وكانت حـ تقسم $\overleftarrow{أ ب}$ بنسبة م : ن

فإن : $ن\overleftarrow{ج_{م}} + م\overleftarrow{ج_{ن}} = (ن + م)\overleftarrow{ج_{حـ}}$ وإذا كانت حـ منتصف $\overline{أ ب}$ فإن : $\overleftarrow{ج_{م}} + \overleftarrow{ج_{ن}} = ٢\overleftarrow{ج_{حـ}}$

⑤ إذا أثرت قوة $\overleftarrow{ق}$ فى مستوى متوازى أضلاع أ ب حـ ء وكان $\overleftarrow{ج_{م}}$ ، $\overleftarrow{ج_{ن}}$ ، $\overleftarrow{ج_{حـ}}$ ، $\overleftarrow{ج_{ء}}$ هى القياسات الجبرية لعزم القوة حول رؤوس متوازى الأضلاع الأربعة على الترتيب فإن : $\overleftarrow{ج_{م}} + \overleftarrow{ج_{حـ}} = \overleftarrow{ج_{ن}} + \overleftarrow{ج_{ء}}$

تذكر عزم قوة بالنسبة لنقطة فى نظام إحداثى ثنائى البعد

إذا كانت القوة $\overleftarrow{ق} = \overleftarrow{ق_{س}}\overleftarrow{س} + \overleftarrow{ق_{ص}}\overleftarrow{ص}$ تؤثر فى نقطة أ متجه موضعها بالنسبة للنقطة و هو $\overleftarrow{ر} = (س ، ص)$ فإن :

$$\overleftarrow{ج_{و}} = \overleftarrow{ر} \times \overleftarrow{ق} = (س ، ص) \times (\overleftarrow{ق_{س}} ، \overleftarrow{ق_{ص}}) = (س\overleftarrow{ق_{ص}} - ص\overleftarrow{ق_{س}})\overleftarrow{ع}$$

تذكر عزم قوة بالنسبة لنقطة فى نظام إحداثى ثلاثى البعد

إذا كانت القوة $\overleftarrow{ق} = \overleftarrow{ق_{س}}\overleftarrow{س} + \overleftarrow{ق_{ص}}\overleftarrow{ص} + \overleftarrow{ق_{ع}}\overleftarrow{ع}$ تؤثر فى نقطة أ متجه موضعها بالنسبة للنقطة و هو $\overleftarrow{ر} = (س ، ص ، ع)$ فإن :

$$\overleftarrow{ج_{و}} = \overleftarrow{ر} \times \overleftarrow{ق} = (س ، ص ، ع) \times (\overleftarrow{ق_{س}} ، \overleftarrow{ق_{ص}} ، \overleftarrow{ق_{ع}})$$

$$= \begin{vmatrix} \overleftarrow{س} & \overleftarrow{ص} & \overleftarrow{ع} \\ س & ص & ع \\ \overleftarrow{ق_{س}} & \overleftarrow{ق_{ص}} & \overleftarrow{ق_{ع}} \end{vmatrix}$$

$$= (ص\overleftarrow{ق_{ع}} - ع\overleftarrow{ق_{ص}})\overleftarrow{س} + (ع\overleftarrow{ق_{س}} - س\overleftarrow{ق_{ع}})\overleftarrow{ص} + (س\overleftarrow{ق_{ص}} - ص\overleftarrow{ق_{س}})\overleftarrow{ع}$$

لاحظ أن :

① طول العمود الساقط من (و) على خط عمل $\overleftarrow{ق} = \dfrac{\|\overleftarrow{ج_{و}}\|}{\|\overleftarrow{ق}\|}$

② إذا كانت القوة $\overleftarrow{ق}$ تؤثر فى نقطة أ فإن : عزم $\overleftarrow{ق}$ حول نقطة ب $= \overleftarrow{ب أ} \times \overleftarrow{ق}$

③ $\overleftarrow{ج_{و}} = \overleftarrow{ج_{س}}\overleftarrow{س} + \overleftarrow{ج_{ص}}\overleftarrow{ص} + \overleftarrow{ج_{ع}}\overleftarrow{ع}$ حيث :

$\overleftarrow{ج_{س}} = ص\overleftarrow{ق_{ع}} - ع\overleftarrow{ق_{ص}}$ (مركبة العزم فى اتجاه محور س) «حول محور س»

$\overleftarrow{ج_{ص}} = ع\overleftarrow{ق_{س}} - س\overleftarrow{ق_{ع}}$ (مركبة العزم فى اتجاه محور ص) «حول محور ص»

$\overleftarrow{ج_{ع}} = س\overleftarrow{ق_{ص}} - ص\overleftarrow{ق_{س}}$ (مركبة العزم فى اتجاه محور ع) «حول محور ع»

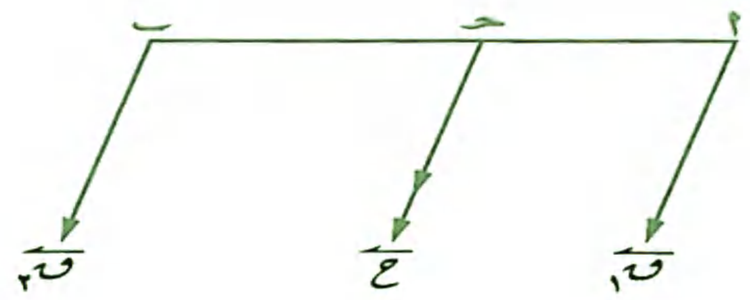
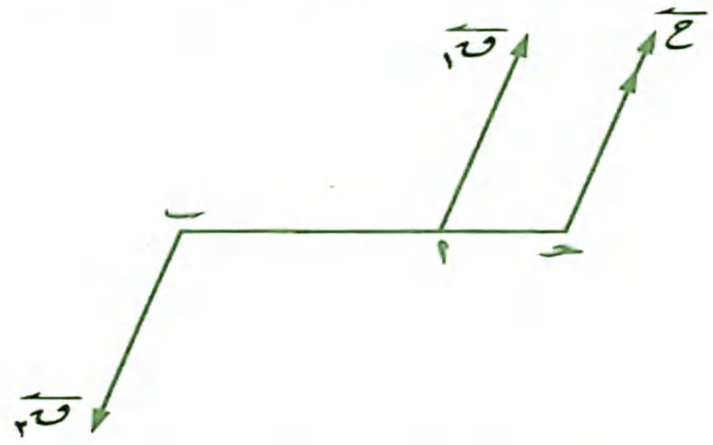
④ ينعدم عزم قوة حول محور فى الحالتين :

(١) إذا اشترك خط عمل القوة مع المحور فى نقطة على الأقل.

(٢) إذا كانت القوة توازى المحور.

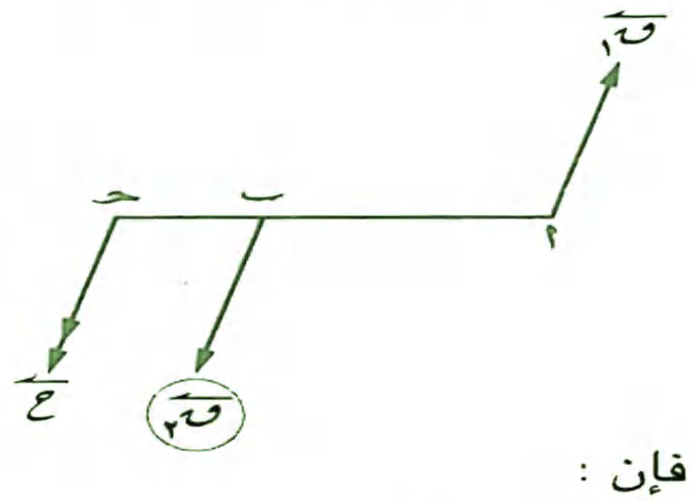
القوى المتوازية

✪ محصلة قوتين متوازيتين مستويتين :

القوتان فى نفس الاتجاه	القوتان متضادتان فى الاتجاه
	
مقدار المحصلة (ح) = $ق_1 + ق_2$ اتجاه المحصلة فى نفس اتجاه القوتين	مقدار المحصلة (ح) = $\|ق_1 - ق_2\|$ اتجاه المحصلة فى اتجاه القوة الأكبر مقدارًا
* نقطة تأثير المحصلة ح تقسم $\overline{أب}$ من الداخل بحيث $ق_1 \times أح = ق_2 \times بح$	* نقطة تأثير المحصلة ح تقسم $\overline{أب}$ من الخارج بحيث $ق_1 \times أح = ق_2 \times بح$
* ومن قوانين التناسب يمكن استنتاج أن : $\frac{ق_1}{بح} = \frac{ق_2}{أح} = \frac{ح}{أب}$	

✪ إذا عُلمت إحدى القوتين المتوازيتين $\overleftarrow{ق_1}$ وعُلمت محصلتهما $\overleftarrow{ح}$ وكان :

• $\overleftarrow{ق_1}$ ، $\overleftarrow{ح}$ فى اتجاهين متضادين



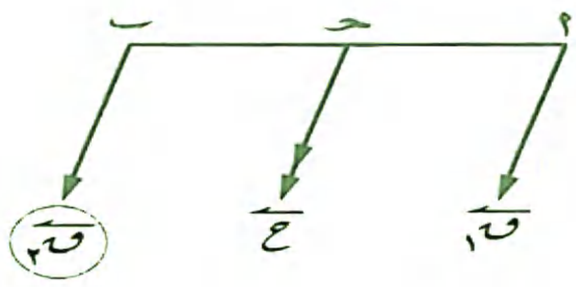
فإن :

(١) $ق_2 = ح + ق_1$

(٢) خط عمل $\overleftarrow{ق_2}$ يقع بين $\overleftarrow{ق_1}$ ، $\overleftarrow{ح}$

(٣) $\overleftarrow{ق_2}$ فى نفس اتجاه $\overleftarrow{ح}$

• $\overleftarrow{ق_1}$ ، $\overleftarrow{ح}$ فى نفس الاتجاه ، $ح > ق_1$



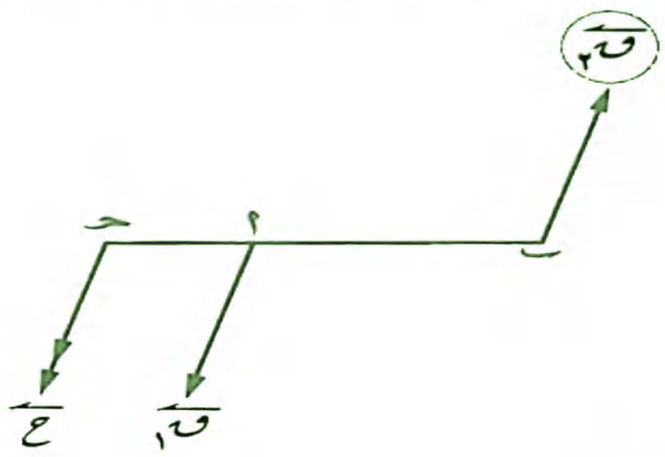
فإن :

(١) $ق_2 = ح - ق_1$

(٢) خط عمل $\overleftarrow{ق_2}$ يقع خارج خطى عمل $\overleftarrow{ق_1}$ ، $\overleftarrow{ح}$ من ناحية $\overleftarrow{ح}$

(٣) $\overleftarrow{ق_2}$ فى نفس اتجاه $\overleftarrow{ح}$

• $\overleftarrow{ق_1}$ ، $\overleftarrow{ح}$ فى نفس الاتجاه ، $ح < ق_1$



فإن :

(١) $ق_2 = ق_1 - ح$

(٢) خط عمل $\overleftarrow{ق_2}$ يقع خارج خطى عمل $\overleftarrow{ق_1}$ ، $\overleftarrow{ح}$ من ناحية $\overleftarrow{ق_1}$

(٣) $\overleftarrow{ق_2}$ فى اتجاه مضاد لاتجاه $\overleftarrow{ق_1}$

✪ محصلة عدة قوى متوازية مستوية :

لتعيين محصلة عدة قوى $\overleftarrow{ق_1}$ ، $\overleftarrow{ق_2}$ ، ... ، $\overleftarrow{ق_ن}$ مستوية متوازية فإن : مقدار واتجاه المحصلة يتعين من العلاقة : $\overleftarrow{ح} = \overleftarrow{ق_1} + \overleftarrow{ق_2} + \cdots + \overleftarrow{ق_ن}$ ، نقطة تأثير المحصلة تتعين باستخدام نظرية العزوم وهى :

المجموع الجبرى لعزوم عدة قوى متوازية مستوية حول نقطة فى مستويها يساوى عزم محصلتها حول نفس النقطة.

معلومة إثرائية

إذا كان $ق_1$ ، $ق_2$ ، ... ، $ق_ن$ هى القياسات الجبرية لعدة قوى متوازية تؤثر فى النقط $أ_1 (س_1 ، ص_1)$ ، $أ_2 (س_2 ، ص_2)$ ، ... ، $أ_ن (س_ن ، ص_ن)$ على الترتيب

فإن القياس الجبرى للمحصلة $ح = ق_1 + ق_2 + ... + ق_ن$

وتؤثر المحصلة فى نقطة ب (س ، ص) وباستخدام مبدأ ونظرية العزوم نجد أن :

$$س = \frac{\sum_{ر=1}^{ن} ق_ر \, س_ر}{\sum_{ر=1}^{ن} ق_ر} \quad ، \quad ص = \frac{\sum_{ر=1}^{ن} ق_ر \, ص_ر}{\sum_{ر=1}^{ن} ق_ر}$$

* إذا اتزن جسم متماسك تحت تأثير ثلاث قوى متوازية مستوية فإن كل قوة من القوى الثلاثة تساوى فى المقدار وتضاد فى الاتجاه محصلة القوتين الأخريين ويكون لهما نفس خط العمل.

✪ **الشروط اللازمة والكافية لاتزان مجموعة من القوى المستوية :**

① ينعدم مجموع المركبات الجبرية للقوى فى اتجاهين متعامدين واقعين فى مستويها

أى : $مجـ س = 0$ ، $مجـ ص = 0$

② ينعدم مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى بالنسبة لنقطة واحدة فى مستويها

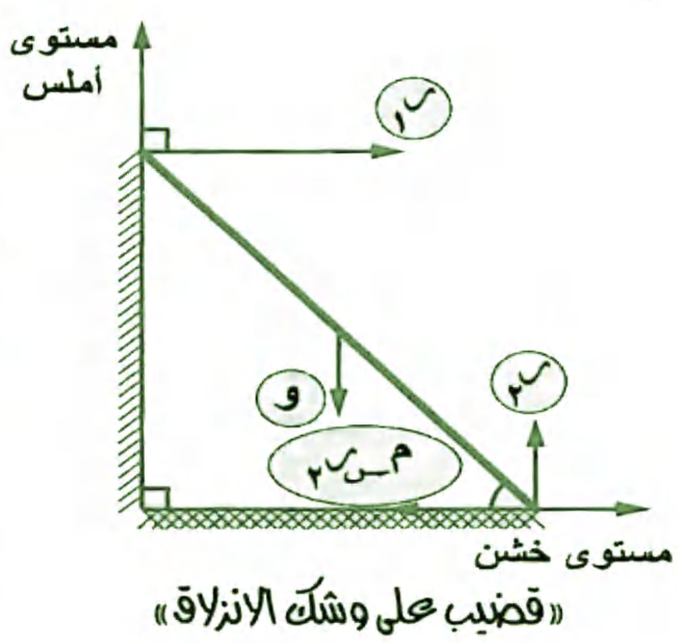
أى أن : ح = صفر

ملاحظات هامة عند تحديد رد الفعل

① إذا ارتكز قضيب بطرفه على مستوى أملس كان رد الفعل عموديًا على المستوى.

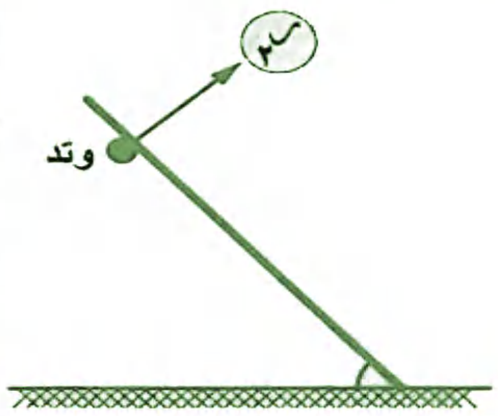
② إذا ارتكز قضيب بطرفه على مستوى خشن كان رد الفعل غير معلوم الاتجاه ويمكن تحليله إلى مركبتين هما رد الفعل العمودى وقوة الاحتكاك.

وإذا كان القضيب على وشك الحركة تكون المركبتين هما رد الفعل العمودى ($ر_2$) ، قوة الاحتكاك النهائى ($م_س ر_2$)



«قضيب على وشك الانزلاق»

③ إذا ارتكز قضيب بإحدى نقاطه الداخلية على (وتد – جسم آخر) كان رد الفعل عمودى على القضيب



ملخص الوحدة الثالثة استاتيكا

تذكر الازدواج

- الازدواج : هو نظام يتكون من قوتين :
  (١) متساويتين فى المقدار.
  (٢) متضادتين فى الاتجاه.
  (٣) لا يجمعهما خط عمل واحد.

- عزم الازدواج :

هو متجه ثابت لا يعتمد على النقطة التى ينسب إليها عزما قوتيه ويساوى عزم إحدى قوتيه بالنسبة لأى نقطة على خط عمل الأخرى.

أى أن : $\overleftarrow{ج} = \overleftarrow{ب أ} \times \overleftarrow{ق_1} = \overleftarrow{أ ب} \times \overleftarrow{ق_2}$ حيث : $\overleftarrow{ق_1} = -\overleftarrow{ق_2}$

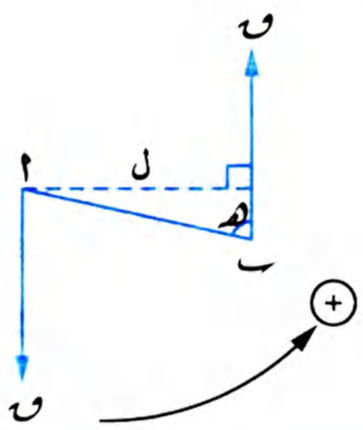
- معيار عزم الازدواج :

$\| \overleftarrow{ج} \| = ب أ \times ق \times \text{جا} هـ = ق \times ل$

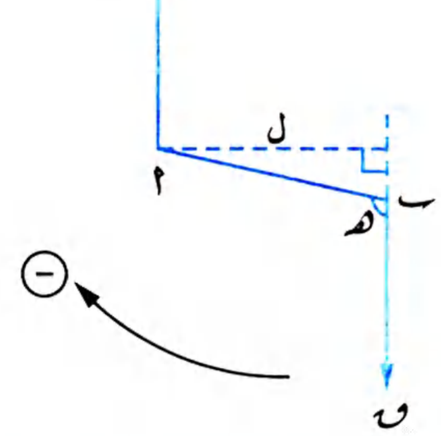
حيث $هـ$ قياس الزاوية بين $\overleftarrow{ب أ}$ ، $\overleftarrow{ق}$

، ل (ذراع الازدواج) هو البُعد العمودى بين خطى عمل القوتين.

- القياس الجبرى لعزم الازدواج :



$ج = ق \times أ ب \text{ جا} هـ = ق \times ل$



$ج = -ق \times أ ب \text{ جا} هـ = -ق \times ل$

تذكر اتزان جسم تحت تأثير ازدواجين

- يكون الجسم متزنًا تحت تأثير الازدواجين $\overleftarrow{ج_1}$ ، $\overleftarrow{ج_2}$ إذا كان : $\overleftarrow{ج_1} + \overleftarrow{ج_2} = \overleftarrow{و}$ أى أن : $\overleftarrow{ج_1} = -\overleftarrow{ج_2}$

- يتزن الجسم تحت تأثير عدة ازدواجات $\overleftarrow{ج_1}$ ، $\overleftarrow{ج_2}$ ، $\overleftarrow{ج_3}$ ، ..... ، $\overleftarrow{ج_ن}$ إذا كان : $\overleftarrow{ج_1} + \overleftarrow{ج_2} + \overleftarrow{ج_3} + \cdots\cdots + \overleftarrow{ج_ن} = \overleftarrow{و}$

لاحظ أن :

(١) يتزن جسم تحت تأثير ازدواجين $\overleftarrow{ج_1}$ ، $\overleftarrow{ج_2}$ أو أكثر إذا انعدم مجموع القياسات الجبرية لعزوم الازدواجات

أى إذا كان : $ج_1 + ج_2 = ٠$ أى : $ج_1 = -ج_2$

(٢) الازدواج لا يتزن إلا مع ازدواج آخر بمعنى أن الجسم لا يمكن أن يتزن تحت تأثير ازدواج وقوة.

تذكر تكافؤ ازدواجين

يتكافأ ازدواجان مستويان إذا تساوى متجها عزميهما. أى أن : شرط تكافؤ ازدواجين مستويين $\overleftarrow{ج_1}$ ، $\overleftarrow{ج_2}$ هو : $\overleftarrow{ج_1} = \overleftarrow{ج_2}$

ملخص الوحدة الثالثة استاتيكا

لاحظ أن :

(١) الازدواجان المستويان $\overleftarrow{ج_١}$ ، $\overleftarrow{ج_٢}$ يتكافئان إذا تساوى القياس الجبرى لعزميهما أى إذا كان : $ج_١ = ج_٢$

(٢) الازدواج لا يكافئ إلا ازدواج آخر.

تذكر الازدواج المحصل

مجموع أى عدد محدود من الازدواجات المستوية يسمى الازدواج المحصل وهو ازدواج عزمه يساوى مجموع عزوم هذه الازدواجات.

أى أن : $\overleftarrow{ج} = \overleftarrow{ج_١} + \overleftarrow{ج_٢} + ... + \overleftarrow{ج_ن}$

ويكون القياس الجبرى لعزم الازدواج المحصل لعدة ازدواجات مستوية = مجموع القياسات الجبرية لعزوم هذه الازدواجات.

أى أن : $ج = ج_١ + ج_٢ + ... + ج_ن$

لاحظ أنه :

(١) إذا كان ج (القياس الجبرى لعزم الازدواج المحصل) = الصفر فيقال حينئذٍ لمجموعة الازدواجات إنها متوازنة.

(٢) إذا كانت محصلة عدة قوى مستوية = $\overleftarrow{ح}$ ومجموع عزومها حول نقطة فى مستويها $\overleftarrow{ج}$ وكان :

(١) $\overleftarrow{ح} = \overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ج} = \overleftarrow{و}$ ، فإن المجموعة متزنة.

(٢) $\overleftarrow{ح} = \overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ج} \neq \overleftarrow{و}$ فإن المجموعة تكافئ ازدواجًا معيار عزمه = $\| \overleftarrow{ج} \|$

(٣) إذا كان مجموع القياسات الجبرية لعزوم مجموعة من القوى المستوية بالنسبة لثلاث نقط ليست على استقامة واحدة فى مستويها يساوى مقدارًا ثابتًا (لا يساوى الصفر) كانت هذه المجموعة تكافئ ازدواجًا القياس الجبرى لعزمه يساوى هذا المقدار الثابت.

أى أنه :

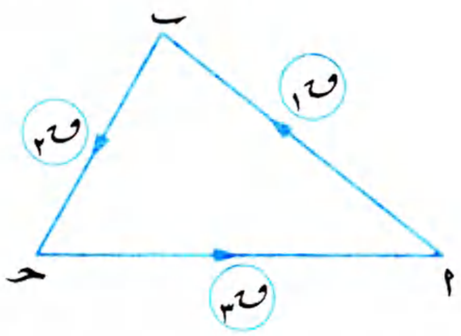
- لأى ثلاث نقط أ ، ب ، حـ ليست على استقامة واحدة إذا أثرت مجموعة من القوى فى مستويها وكان : $ج_م = ج_ى = ج_حـ$ = مقدار ثابت (لا يساوى الصفر)

فإن : مجموعة القوى تكافئ ازدواجًا القياس الجبرى لعزمه = المقدار الثابت

ومنها : إذا كان $ج_م = ج_ى = ج_حـ$ = الصفر فإن مجموعة القوى تكون متزنة.

تذكر القواعد الهامة الآتية

(١) إذا أثرت ثلاث قوى مستوية وغير متلاقية فى نقطة فى جسم متماسك ومثلها تمثيلاً تامًا أضلاع مثلث مأخوذة فى ترتيب دورى واحد كانت هذه المجموعة تكافئ ازدواجًا معيار عزمه يساوى ضعف مساحة سطح المثلث × م حيث م ثابت يساوى $\frac{\text{مقدار القوة}}{\text{طول الضلع الممثل لها}}$



أى إذا كان : $\frac{ق_١}{أ ب} = \frac{ق_٢}{ب حـ} = \frac{ق_٣}{حـ أ}$ = م حيث م مقدار ثابت ، $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ ، $\overleftarrow{ق_٣}$

مأخوذة فى اتجاه دورى واحد $\overleftarrow{أ ب}$ ، $\overleftarrow{ب حـ}$ ، $\overleftarrow{حـ أ}$ على الترتيب فإن مجموعة القوى $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ ، $\overleftarrow{ق_٣}$ تكافئ ازدواجًا معيار عزمه = ٢ × مساحة Δ أ ب حـ × م

(٢) إذا أثرت عدة قوى مستوية فى جسم متماسك ومثلها تمثيلاً تامًا أضلاع مضلع مقفل مأخوذة فى ترتيب دورى واحد كانت هذه المجموعة تكافئ ازدواجًا معيار عزمه يساوى ضعف مساحة سطح المضلع فى عدد وحدات القوة التى تمثلها وحدة الأطوال.

موقع الدكتور محمد رزق التعليمي

امسح الباركود بالموبيل لتثبيت التطبيق وتحميل كل الملازم مجانا وبسرعه

MR

حمل التطبيق الأن

GET IT ON Google Play

ملازم ابتدائي | ملازم اعدادي | ملازم ثانـــوي | كورسات ونتائج امتحانات

موقع الدكتور محمد رزق
Dr.MoRizK